**Санкт-Петербургский государственный университет**

**Р А Б О Ч А Я П Р О Г Р А М М А**

**УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ**

Дополнительные главы алгебры и теории чисел

Advanced Algebra and Number Theory

**Язык(и) обучения**

русский

Трудоемкость в зачетных единицах: 2

Регистрационный номер рабочей программы: 051728

**Раздел 1. Характеристики учебных занятий**

**1.1. Цели и задачи учебных занятий**

Целями курса являются знакомство с классическими и некоторыми современными результатами алгебры и теории чисел и развитие навыков их применения, в том числе в других областях математики и программировании; формирование у обучающихся представления о различных методах современных алгебры и теории чисел.

Обучающиеся должны овладеть теоретическими основами алгебры и теории чисел, излагающимися в курсе, и навыками в проведении алгебраических исследований, знать содержание данной дисциплины и иметь достаточно полное представление о возможностях использования её методов в других разделах математики и в приложениях, в особенности – в сфере информационных технологий.

Поставленные цели достигаются путём решения следующих задач курса: изучение основных разделов курса; развитие навыков самостоятельного решения алгебраических задач и интерпретации полученных результатов; обеспечение базы для использования методов и результатов алгебры и теории чисел в компьютерных про-граммах; повышение математической культуры обучающегося.

**1.2. Требования подготовленности обучающегося к освоению содержания учебных занятий (пререквизиты)**

Для успешного освоения дисциплины обучающийся должен иметь общее среднее образование и предварительную подготовку по основным математическим дисциплинам.

**1.3. Перечень результатов обучения (learning outcomes)**

ПКА-1, ПКА-5, ПКП-1, ПКП-4, ПКА- 5

Уметь демонстрировать и использовать современные знания алгебры и теории чисел, методы исследования объектов профессиональной деятельности, развивать навыки алгебраического, абстрактного, логического мышления.

Быть способным создавать и исследовать при помощи алгебры и теории чисел новые математические модели в естественных науках, учитывая возможности современных информационных технологий, программирования и компьютерной техники.

**1.4. Перечень и объём активных и интерактивных форм учебных занятий**

В качестве основных форм аудиторной работы в рамках курса в пятом семестре предполагается проведение лекционных занятий и самостоятельная работа в присутствии преподавателя, которые представляют подробное изучение материала по соответствующим темам дисциплины. Предусмотрена также самостоятельная работа с использованием методических материалов: индивидуальная работа с использованием основной и дополнительной литературы к курсу. Промежуточная аттестация: зачёт в 5 учебном семестре 3 курса.

**Раздел 2. Организация, структура и содержание учебных занятий**

**2.1. Организация учебных занятий**

**2.1.1 Основной курс**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Трудоёмкость, объёмы учебной работы и наполняемость групп обучающихся | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины,  практики и т.п. | Контактная работа обучающихся с преподавателем | | | | | | | | | | | | | Самостоятельная работа | | | | Объём активных и интерактивных  форм учебных занятий | Трудоёмкость |
| лекции | | семинары | консультации | практические  занятия | лабораторные работы | контрольные работы | коллоквиумы | текущий контроль | промежуточная  аттестация | итоговая аттестация | под руководством преподавателя | в присутствии  преподавателя | сам. раб. с использованием  методических материалов | текущий контроль (сам.раб.) | промежуточная аттестация (сам.раб.) | итоговая аттестация  (сам.раб.) |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Семестр 5 | | 30 |  |  |  |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 10 |  | 10 | 2 |
|  | | 2-100 |  |  |  |  |  |  |  | 1-25 |  |  | 1-25 |  |  | 1-1 |  |  |  |
| ИТОГО | | 30 |  |  |  |  |  |  |  | 2 |  |  | 30 |  |  | 10 |  |  | 2 |

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Виды, формы и сроки текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации | | | | | | |
| Код модуля в составе дисциплины, практики и т.п. | Формы текущего контроля успеваемости | | Виды промежуточной аттестации | | Виды итоговой аттестации  (только для программ итоговой аттестации и дополнительных образовательных программ) | |
| Формы | Сроки | Виды | Сроки | Виды | Сроки |
| ОСНОВНАЯ ТРАЕКТОРИЯ | | | | | | |
| Форма обучения: очная | | | | | | |
| Семестр 5 |  |  | зачёт, устно, традиционная форма | по графику промежуточной аттестации |  |  |

**2.2. Структура и содержание учебных занятий**

5 семестр

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № п.п. | Наименование раздела | Вид учебных занятий | Кол-во часов |
| 1 | Кольца и модули | лекции | 6 |
| самостоятельная работа в присутствии преподавателя | 6 |
| 2 | Линейные представления | лекции | 6 |
| самостоятельная работа в присутствии преподавателя | 6 |
| 3 | Группы Ли | лекции | 6 |
| самостоятельная работа в присутствии преподавателя | 6 |
| 4 | Теория размерности | лекции | 6 |
| самостоятельная работа в присутствии преподавателя | 6 |
| 5 | Целые алгебраические числа | лекции | 6 |
| самостоятельная работа в присутствии преподавателя | 6 |
|  | Промежуточная аттестация | зачёт | 2 |
| самостоятельная работа | 10 |
| Итого | | | 72 |

Раздел 1. Кольца и модули (6 часов занятий).

Тема 1. Радикал  Джекобсона.  Простые  и  полупростые  кольца.  Структура простых  и полупростых  артиновых  колец.

Тема 2. Теорема  плотности.  Теорема  о  двойном коммутанте. Конечномерные алгебры с делением над полем вещественных чисел.

Тема 3. Конечные тела. Группа Брауэра. Модули Свободные модули. Неприводимые и неразложимые модули.

Раздел 2. Линейные представления (6 часов занятий).

Тема 1. Линейные представления: основные определения.

Тема 2. Полная приводимость линейных представлений конечных и компактных групп.

Тема 3. Конечномерные ассоциативные алгебры.

Тема 4. Линейные представления конечных групп.

Раздел 3. Группы Ли (6 часов занятий).

Тема 1. Определение и простейшие свойства групп Ли. Экспоненциальное отображение.

Тема 2. Касательная алгебра Ли и присоединённое представление.

Тема 3. Линейные представления групп Ли.

Раздел 4. Теория размерности (4 часа занятий).

Тема 1. Градуированные кольца и модули, многочлены Гильберта-Самюэля, функции Самюэля.

Тема 2. Основная теорема теории размерности.

Тема 3. Размерность колец многочленов и конечно-порождённых областей, системы параметров.

Раздел 5. Целые алгебраические числа.(8 часов занятий)

Тема 1. Гауссовы числа, определение, свойства, простые элементы и единицы кольца.

Тема 2. Целостность. Определение целостного кольца, теорема Лапласа. Целое замыкание кольца. След и норма элемента, свойства. Дискриминант и целый базис.

Тема 3. Идеалы. Определение, теорема о максимальном и простом идеале нётерова кольца. Дедекиндово кольцо. Теорема о разложении на простые идеалы.

Тема 4. Китайская теорема об остатках, дробные идеалы. Решётки, базис решётки, Теорема Минковского об объёме решётки.

Тема 5. Теория Минковского. Пространство Минковского. Объёмы.

Тема 6. Абсолютная норма идеала, свойства. Число классов и теорема о конечности числа классов.

Тема 7. Теорема Дирихле о единицах.

Тема 8. Расширения Дедекиндовых полей. Степень инерции и индекс ветвления, фундаментальное уравнение в сепарабельном расширении дедекиндовых полей.

**Раздел 3. Обеспечение учебных занятий**

**3.1. Методическое обеспечение**

**3.1.1 Методические указания по освоению дисциплины**

Успешное освоение дисциплины возможно благодаря посещению лекций, участию в обсуждении рассматриваемых вопросов, самостоятельной работе, включающей в себя чтение рекомендованной литературы.

**3.1.2 Методическое обеспечение самостоятельной работы**

Самостоятельная работа обучающихся в рамках данной дисциплины является важным компонентом обучения. Настоящей программой предусмотрены формы самостоятельной работы в присутствии преподавателя, с использованием кроме материалов курса также и источников, указанных в списках обязательной и дополнительной литературы.

Примерный список тем для самостоятельной работы обучающихся

1. Определение симплициального множества.
2. Симплициальные тождества. Сингулярное симплициальное множество топологического пространства.
3. Классифицирующее пространство категории.
4. Геометрическая реализация симплициального множества.
5. Сопряженность реализации и сингулярного функтора.
6. Свойства поднятия.
7. Расслоения Кана и комплексы Кана. Расслоения Серра.
8. Симплициальные группы являются комплексами Кана.
9. Комплексы функций.
10. Сопряженность комплекса функций и произведения.
11. Симплициальные гомотопии.
12. Компоненты связности симплициального множества.
13. Определение гомотопических групп.
14. Абелевость старших гомотопических групп.
15. Длинная точная последовательность гомотопических групп.
16. Корасслоенные и расслоенные объекты. Тривиальные расслоения и корасслоения.
17. Левые и правые гомотопии.
18. Теорема о накрывающей гомотопии.
19. Локализация категории по классу морфизмов.
20. Гомотопическая категория модельной категории.
21. Теорема о существовании гомотопической категории.
22. Вычисление морфизмов в гомотопической категории.
23. Соответствия между гомотопиями.
24. Отмеченные модельные категории.
25. Последовательность расслоения.
26. Точная последовательность, связанная с последовательностью расслоения.
27. Последовательность корасслоения.
28. Точная последовательность, связанная с последовательностью корасслоения.
29. Производные функторы для функтора из модельной категории.
30. Примеры производных функторов для абелевых категорий.
31. Определение симплициальной категории.
32. Симплициальный функтор.
33. Гомотопии между морфизмами.
34. Свойства поднятия в симплициальных категориях.
35. Функтор сингулярного комплекса.
36. Аргумент малого объекта.
37. Тривиальные расслоения и корасслоения в топологических пространствах.
38. CW-комплексы образуют модельную категорию.
39. Симплициальные множества образуют модельную категорию.
40. Проективные объекты и генераторы.
41. Симплициальные объекты образуют модельную категорию.
42. Обобщенные объекты Эйленберга–Маклейна.
43. Гомологии и когомологии.

**3.1.3 Методика проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации и критерии оценивания**

В течение учебного года по дисциплине проводятся опросы, предлагаются темы и упражнения для самостоятельной работы, в конце семестра проводится зачет.

*Методика проведения зачета*

Зачет проводится в устно-письменной форме. Преподаватели имеют набор заданий и список вопросов для проведения зачета. Зачет выставляется по итогам текущего контроля и результатам решения контрольных заданий во время проведения промежуточной аттестации.

Использование конспектов и учебников, а также электронных устройств хранения, обработки или передачи информации при подготовке и ответе на вопросы зачета не разрешается. В случае обнаружения факта использования недозволенных материалов (устройств) составляется акт, и студент удаляется с экзамена.

*Критерии выставления зачета:*

«Зачет» ставится за успешные результаты, показанные на опросах в рамках текущего контроля, выполнение заданий и правильные ответы на теоретические вопросы преподавателя по курсу.

**3.1.4 Методические материалы для проведения текущего контроля успеваемости и промежуточной аттестации (контрольно-измерительные материалы, оценочные средства)**

Примерный перечень вопросов для проведения зачета

1. Радикал  Джекобсона.  Характеризация его элементов.
2. Простые  кольца.
3. Классически полупростые кольца.
4. Описание простых  и полупростых  артиновых  колец.
5. Теорема  плотности.
6. Теорема  о  двойном коммутанте.
7. Описание конечномерных алгебры с делением над полем вещественных чисел.
8. Конечные тела, их коммутативность.
9. Группа Брауэра.
10. Модули Свободные модули, их свойства. Примеры модулей, не являющихся свободными.
11. Неприводимые и неразложимые модули.
12. Линейные представления: основные определения.
13. Полная приводимость линейных представлений конечных групп.
14. Линейные представления компактных групп, примеры.
15. Полная приводимость линейных представлений компактных групп.
16. Конечномерные ассоциативные алгебры. Групповые алгебры.
17. Линейные представления конечных групп: описание в терминах групповых алгебр.
18. Определение, примеры и простейшие свойства групп Ли. Экспоненциальное отображение.
19. Касательная алгебра Ли и присоединённое представление.
20. Линейные представления групп Ли.
21. Градуированные кольца и модули, примеры.
22. Многочлены Гильберта-Самюэля, функции Самюэля.
23. Основная теорема теории размерности.
24. Размерность колец многочленов и конечно-порождённых областей, системы параметров.
25. Гауссовы числа, определение, свойства, евклидовость кольца целых гауссовых чисел.
26. Простые элементы и единицы кольца целых гауссовых чисел.
27. Определение целостного кольца, теорема Лапласа. Целое замыкание кольца. След и норма элемента, свойства.
28. Дискриминант и целый базис.
29. Идеалы, нётеровые кольца.
30. Теорема о максимальном и простом идеале нётерова кольца.
31. Дедекиндовы кольца. Теорема о разложении на простые идеалы.
32. Китайская теорема об остатках.
33. Решётки, базис решётки.
34. Теорема Минковского об объёме решётки.
35. Теория Минковского. Пространство Минковского. Объёмы.
36. Абсолютная норма идеала, свойства.
37. Число классов и теорема о конечности числа классов.
38. Теорема Дирихле о единицах.
39. Расширения дедекиндовых полей.
40. Степень инерции и индекс ветвления, фундаментальное уравнение в сепарабельном расширении дедекиндовых полей.

**3.1.5 Методические материалы для оценки обучающимися содержания и качества учебного процесса**

Оценка обучающимися содержания и качества учебного процесса по дисциплине «Обработка данных и представление результатов» осуществляется в установленном в СПбГУ порядке.

**3.2. Кадровое обеспечение**

**3.2.1 Образование и (или) квалификация штатных преподавателей и иных лиц, допущенных к проведению учебных занятий**

К чтению лекций и проведению практических занятий привлекаются преподаватели, имеющие базовое образование и/или ученую степень, соответствующую профилю преподаваемой дисциплины.

**3.2.2 Обеспечение учебно-вспомогательным и (или) иным персоналом**

Не требуется.

**3.3. Материально-техническое обеспечение**

**3.3.1 Характеристики аудиторий (помещений, мест) для проведения занятий**

Требуются стандартно оборудованные лекционные аудитории (доска, мел, губка, маркер).

**3.3.2 Характеристики аудиторного оборудования, в том числе неспециализированного компьютерного оборудования и программного обеспечения общего пользования**

Стандартно оборудованные аудитории для проведения занятий.

**3.3.3 Характеристики специализированного оборудования**

Не требуется.

**3.3.4 Характеристики специализированного программного обеспечения**

Не требуется.

**3.3.5 Перечень и объёмы требуемых расходных материалов**

Мел или цветные фломастеры, губки; бумага формата А4, канцелярские товары, картриджи принтеров – в объеме, необходимом для проведения занятий, по заявкам преподавателей.

**3.4. Информационное обеспечение**

**3.4.1 Список обязательной литературы**

1. Emily Riehl, Categorical Homotopy Theory, Cambridge University Press, 2014.

2. Paul G. Goerss, John F. Jardine, Simplicial Homotopy Theory, Birkhäuser Basel, 2009.

3. Jacob Lurie, Higher Topos Theory, Princeton University Press, 2009.

**3.4.2 Список дополнительной литературы**

1. Daniel Quillen, Homotopical Algebra, LNM 43, Springer, 1967.

2. Mark Hovey, Model Categories, AMS, 1999.

**3.4.3 Перечень иных информационных источников**

Не требуется.

**Раздел 4. Разработчики программы**

Генералов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, Кафедра высшей алгебры и теории чисел, a.generalov@spbu.ru